

Alumno _____

nº matrícula:

--	--	--	--

NORMAS DEL EXAMEN: 1) Cada ejercicio debe resolverse en la hoja del enunciado: no se admiten hojas adicionales. 2) Debe escribirse con tinta azul o negra: no se admite escritura a lápiz ni en color rojo. 3) El DNI del alumno debe estar a la vista sobre la mesa. 4) No está permitido levantarse ni hablar hasta que se hayan recogido los últimos ejercicios y se salga del aula de examen. 5) Se puede disponer sólo del Formulario oficial de la asignatura (sin informaciones adicionales de ningún tipo) y del papel en blanco para uso como borrador.

Ejercicio nº 1 .- En el espacio vectorial euclideo $\mathbb{V}_3$ se consideran los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$ linealmente independientes y el tensor $\underline{T}$ de tercer orden, que a cada vector $\bar{v} \in \mathbb{V}_3$ le asocia el tensor $\underline{T} \cdot \bar{v} = \bar{a} \otimes \bar{v} + \bar{v} \otimes \bar{b}$. Se pide:

1) Si $\{\bar{g}_i\}$ es una base de $\mathbb{V}_3$, de recíproca $\{\bar{g}^i\}$, verificar que $\underline{T} = \bar{a} \otimes \bar{g}^k \otimes \bar{g}_k + \bar{g}^k \otimes \bar{b} \otimes \bar{g}_k$. [3 puntos]

Supongamos en lo que sigue que $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son unitarios y mutuamente ortogonales y sean: el vector $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$, el tensor $\underline{C} = \underline{T} \cdot \bar{c}$ y la base $\{\bar{e}_i\} = \{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$. Se pide:

2) Componentes de $\underline{C}$ en la base diádica relativa a $\{\bar{e}_i\}$ y expresión de la potencia $\underline{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$. [1 punto]

3) Estudiar si $\underline{C}$ es regular, singular, simétrico, antisimétrico u ortogonal. Determinar su traspuesto y, en su caso, su tensor inverso. [1 punto]

4) Determinar los autovalores de $\underline{C}$ e indicar si existe una base de vectores propios. [1 puntos]

5) Comprobar que el tensor $\underline{C}$ se puede expresar como producto, en un cierto orden, de los tensores $\underline{P} = \bar{b} \otimes \bar{b} + \bar{c} \otimes \bar{c}$ y $\underline{Q} = \bar{a} \otimes \bar{c} + \bar{b} \otimes \bar{a} + \bar{c} \otimes \bar{b}$ e indicar de qué tipo de transformaciones geométricas se trata (homotecia, proyección sobre un plano o una recta, rotación, etc...), dando con detalle los parámetros definitorios de ambas transformaciones. [4 puntos]

Solución:

• 1) Comprobamos la igualdad pedida viendo que $\underline{T}$ y la suma de tríadas $\bar{a} \otimes \bar{g}^k \otimes \bar{g}_k + \bar{g}^k \otimes \bar{b} \otimes \bar{g}_k$ producen el mismo resultado sobre un vector genérico $\bar{v}$ (definición de igualdad entre tensores)

pero $\underline{T} \cdot \bar{v} = \bar{a} \otimes \bar{v} + \bar{v} \otimes \bar{b}$ según la definición del enunciado;

y, por su parte: $[\bar{a} \otimes \bar{g}^k \otimes \bar{g}_k + \bar{g}^k \otimes \bar{b} \otimes \bar{g}_k] \cdot \bar{v} = \bar{a} \otimes \bar{g}^k (\bar{g}_k \cdot \bar{v}) + \bar{g}^k \otimes \bar{b} (\bar{g}_k \cdot \bar{v}) = \bar{a} \otimes (v_k \bar{g}^k) + (v_k \bar{g}^k) \otimes \bar{b} = \bar{a} \otimes \bar{v} + \bar{v} \otimes \bar{b}$;
así queda comprobada la igualdad. #.

• 2) i) Se observa que la base considerada en la situación supuesta es de tipo canónico, $\{\bar{e}_i\}$, por lo que los cuatro tipos de componentes tensoriales coinciden entre sí y no es preciso distinguirlos. Se tiene:

$$\underline{C} := \underline{T} \cdot \bar{c} := \bar{a} \otimes \bar{c} + \bar{c} \otimes \bar{b} = \bar{e}_1 \otimes \bar{e}_3 + \bar{e}_3 \otimes \bar{e}_2 \Rightarrow [C_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ii) Calculamos, primeramente $\underline{C}^2$ por sus componentes en esa base $\{\bar{e}_i \otimes \bar{e}_j\}$: $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

continuamos con $\underline{C}^3 = \underline{C}^2 \cdot \underline{C}$ análogamente: $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

De donde, deducimos que el resto de potencias de $\underline{C}$ darán como resultado el tensor nulo, $\underline{0}$.

Así nos resulta: $\underline{C}^n = \begin{cases} \bar{e}_1 \otimes \bar{e}_2 & \text{si } n = 2 \\ \underline{0} & \text{si } n > 2 \end{cases}$ #.

• 3) i) A la vista de su representación matricial en la base diádica canónica, $\det(\underline{C}) = 0$, luego $\underline{C}$ es un tensor *singular*. La misma matriz no es simétrica ni antisimétrica y permite asegurar que $\underline{C}$ tampoco es *simétrico* ni *antisimétrico*. Finalmente, como un tensor ortogonal es regular (pues tiene determinante 1 ó -1), $\underline{C}$ tampoco es *ortogonal*.

ii) El traspuesto de $\underline{C}$ es:

$$\underline{\mathbf{C}}^t = (\bar{\mathbf{e}}_1 \otimes \bar{\mathbf{e}}_3 + \bar{\mathbf{e}}_3 \otimes \bar{\mathbf{e}}_2)^t = \bar{\mathbf{e}}_3 \otimes \bar{\mathbf{e}}_1 + \bar{\mathbf{e}}_2 \otimes \bar{\mathbf{e}}_3 = \bar{\mathbf{c}} \otimes \bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}} \otimes \bar{\mathbf{c}} \Rightarrow [\mathbf{C}_{ij}^t] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

iii) No siendo regular, no admite tensor inverso.

#.

●4) Planteamos el polinomio característico:

$$P(\lambda) = \det[\underline{\mathbf{C}} - \lambda \underline{\mathbf{1}}] = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3$$

se deduce que el autovalor de $\underline{\mathbf{C}}$ es $\lambda = 0$ (autovalor triple)

$\underline{\mathbf{C}}$ no puede, pues, admitir una base de autovectores, pues entonces debería coincidir con el tensor nulo, $\underline{\mathbf{0}}$, ya que admitiría una expresión contra-covariantes diagonal en la base propia, con la diagonal de 0's, la matriz nula. #.

●5) i) Siendo $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ y $\bar{\mathbf{c}}$ ortogonales entre sí y unitarios y $\underline{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{a}} \otimes \bar{\mathbf{c}} + \bar{\mathbf{c}} \otimes \bar{\mathbf{b}}$, se observa que efectivamente $\underline{\mathbf{C}} = \underline{\mathbf{Q}} \cdot \underline{\mathbf{P}}$, porque:

$$\underline{\mathbf{Q}} \cdot \underline{\mathbf{P}} = (\bar{\mathbf{a}} \otimes \bar{\mathbf{c}} + \bar{\mathbf{b}} \otimes \bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{c}} \otimes \bar{\mathbf{b}}) \cdot (\bar{\mathbf{b}} \otimes \bar{\mathbf{b}} + \bar{\mathbf{c}} \otimes \bar{\mathbf{c}}) = \bar{\mathbf{a}} \otimes \bar{\mathbf{c}} + \underline{\mathbf{0}} + \bar{\mathbf{c}} \otimes \bar{\mathbf{b}} = \underline{\mathbf{C}}$$

ii) $\forall \bar{\mathbf{v}} \in \mathbb{V}_3 : \underline{\mathbf{P}} \cdot \bar{\mathbf{v}} = (\bar{\mathbf{b}} \otimes \bar{\mathbf{b}} + \bar{\mathbf{c}} \otimes \bar{\mathbf{c}}) \cdot \bar{\mathbf{v}} = (\bar{\mathbf{e}}_2 \otimes \bar{\mathbf{e}}_2 + \bar{\mathbf{e}}_3 \otimes \bar{\mathbf{e}}_3) \cdot \bar{\mathbf{v}} = \dots = v_2 \bar{\mathbf{e}}_2 + v_3 \bar{\mathbf{e}}_3 = \text{proy. de } \bar{\mathbf{v}} \text{ al plano } \Pi\{\bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}\} = \{\bar{\mathbf{a}}\}^\perp$, o

sea, $\underline{\mathbf{P}}$ es la proyección al plano vectorial de vector característico $\bar{\mathbf{a}}$ o plano YZ en el sistema cartesiano asociado a la base canónica.

iii) Por su parte, $\underline{\mathbf{Q}} = \bar{\mathbf{a}} \otimes \bar{\mathbf{c}} + \bar{\mathbf{b}} \otimes \bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{c}} \otimes \bar{\mathbf{b}} = \bar{\mathbf{e}}_1 \otimes \bar{\mathbf{e}}_3 + \bar{\mathbf{e}}_2 \otimes \bar{\mathbf{e}}_1 + \bar{\mathbf{e}}_3 \otimes \bar{\mathbf{e}}_2 \Rightarrow [\mathbf{Q}_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ es una matriz de compo-

nentes canónicas de $\underline{\mathbf{Q}}$. Se deduce así que $\underline{\mathbf{Q}} \cdot \bar{\mathbf{e}}_1 = \bar{\mathbf{e}}_2$, $\underline{\mathbf{Q}} \cdot \bar{\mathbf{e}}_2 = \bar{\mathbf{e}}_3$, $\underline{\mathbf{Q}} \cdot \bar{\mathbf{e}}_3 = \bar{\mathbf{e}}_1$, y, por tanto, $\underline{\mathbf{Q}}$ es una rotación de ejes. Sus parámetros definitorios son el eje $\bar{\mathbf{e}}$ y el ángulo de rotación θ . Para determinarlos se puede razonar geoméricamente o analíticamente.

Geoméricamente, la rotación se visualiza en la circunferencia que pasa por los extremos de los tres vectores básicos, que se encuentra en un plano ortogonal a la diagonal del triedro $\{x=y=z\}$ y con su centro en esa recta. El ángulo es de 120° ó $\frac{2\pi}{3}$ rad. y el eje es $\bar{\mathbf{e}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\bar{\mathbf{e}}_1 + \bar{\mathbf{e}}_2 + \bar{\mathbf{e}}_3) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}} + \bar{\mathbf{c}})$.

Analíticamente, el ángulo puede determinarse por la relación: $\text{traza}(\underline{\mathbf{Q}}) = 1 + 2 \cos \theta = 0 \Rightarrow \cos \theta = -\frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$;

y el eje se deduce de la relación $\underline{\mathbf{Q}} - \underline{\mathbf{Q}}^t = 2 \sin \theta (\bar{\mathbf{e}} \times) = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} (\bar{\mathbf{e}} \times) = \sqrt{3} (\bar{\mathbf{e}} \times)$; pero la matriz en las base canónica de

$$\underline{\mathbf{Q}} - \underline{\mathbf{Q}}^t \text{ es } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ de donde deducimos:}$$

$$\bar{\mathbf{e}} \times = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{\mathbf{e}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\bar{\mathbf{e}}_1 + \bar{\mathbf{e}}_2 + \bar{\mathbf{e}}_3)$$

lo que produce el mismo resultado obtenido geoméricamente, claro.

#.